Formes de Hankel

Théorème : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degrés n et soit $x_1, \dots, x_t$ ses racines.
Supposons x_k de multiplicité m_k. On note $s_k = \sum_{n=1}^{t} m_n x_n^k$ avec $s_0 = n$

1) $\sum_{0 \leq i, j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique σ sur $\mathbb{C}^n$ et une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$ de signature (p,q)

2) $p+q$ est le nombre de racines distinctes de P et $p-q$ le nombre de racines réelles distinctes de P.

Preuve : 1) On a un polynôme homogène de degrés 2 sur $\mathbb{C}$, qui définit donc une forme quadratique sur $\mathbb{C}$. De plus, comme P est réel, si x est racine de P, alors $\bar{x}$ est racine de P : $\overline{P(x)} = P(\bar{x}) = 0$.

De plus, leur multiplicités sont égales, on peut donc écrire,

$$s_k = \sum_{\substack{n=1 \\ x_k \in \mathbb{R}}}^{t} m_n x_n^k + \sum_{\substack{n=1 \\ x_k \notin \mathbb{R}}}^{t} m_n \frac{x_n^k + \bar{x}_n^k}{2}$$

Or
$$x_n^k + \bar{x}_n^k = (a+ib)^k + (a-ib)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^j b^j a^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-i)^j b^j a^{k-j}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \underbrace{\left(b^j + (-1)^j b^j\right)}_{\substack{=0 \\ \text{si } j \text{ impair}}} \underbrace{i^j}_{\in \mathbb{R} \text{ si } j \text{ pair}}}_{\in \mathbb{R}}$$

Donc $s_k \in \mathbb{R}$, on a bien une forme quadratique réelle

On pose $\varphi_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ pour $k \in \{0, \dots, t\}$.
$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} x_k^i X_i$$

* <u>Montrons que les φ_k sont indépendants sur $\mathbb{C}$:</u>

On écrit les φ_k dans la base dual de la base canonique (e_i^*) de $\mathbb{C}^*$: $\varphi_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_k^i e_i^*$

On considère alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & & x_t \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & & x_t^{n-1} \end{pmatrix}$. On voit par un déterminant de Vandermonde, que la matrice extraite de taille $t \times t$, $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & & \vdots \\ \vdots & & \\ x_0^t & \cdots & x_t^t \end{pmatrix}$ est inversible et de rang t car les x_k sont deux à deux distincts.

* <u>Montrons que $\sigma = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ et que le nombre t, nombres de racines distinctes de P est $p+q$:</u>

$$\varphi_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2i} X_i^2 + 2\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x_k^{i+j} X_i X_j$$

Ainsi, le coefficient de $X_i X_j$ dans $\sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ vaut: * $\sum_{k=1}^{t} 2 m_k x_k^{i+j} = 2 s_{i+j}$ si $i \neq j$

* $\sum_{k=1}^{t} m_k x_k^{2i} = s_{2i} = s_{i+j}$ si $i = j$

On retrouve bien la forme σ.

Donc le rang de σ est t car les φ_k sont indépendants, c'est aussi $p+q$ d'où $t = p+q$

* <u>Montrons que la signature de $\varphi_k^2 + \overline{\varphi}_k^2$ sur $\mathbb{R}^n$ vaut $(1,0)$ si $x_k \in \mathbb{R}$ et $(1,1)$ sinon.</u>

- Si x_k est réel, $\varphi_k^2 + \overline{\varphi}_k^2 = 2\varphi_k^2$, de signature $(1,0)$ car φ_k est non nulle.
- Si x_k n'est pas réel, comme $z^2 + \overline{z}^2 = 2\mathrm{Re}(z)^2 - 2\mathrm{Im}(z)^2$ alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi}_k^2 = 2\mathrm{Re}(\varphi_k)^2 - 2\mathrm{Im}(\varphi_k)^2$

c'est donc bien une forme quadratique réelle. De plus, comme x_k n'est pas réel, $\overline{x_k} \neq x_k$ donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang 2. Donc φ_k et $\overline{\varphi}_k$ sont indépendants $\Rightarrow \mathrm{rg}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi}_k^2) = 2$ sur $\mathbb{C}$

Donc $\mathrm{rg}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi}_k^2) = 2$ sur $\mathbb{R}$ car le rang est indépendant du corps. Donc la signature est $(1,1)$.

* <u>Conclusion</u>: La forme σ est somme de $m_k \varphi_k^2$ avec les φ_k indépendants. On regroupe les formes φ_k conjuguées entre elles, lorsqu'elles ne sont pas réelles.

Soit r le nombre de racines réelles distinctes, alors, par le résultat précédent, la signature de σ est $(r,0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2}\right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$ d'où $r = p-q$.